樹形図・ブラックボックスを使った漸化式の授業

–生徒の活動によって解空間の構造をつかませる漸化式の授業（訂正版）–

2011/ 8/ 2
第 93 回全国算数・数学教育研究（横浜）大会
高校部会　数学 B
武蔵大学経済学部講師
私立武蔵高校講師
筑波大学附属駒場中・高校講師
吉田　昌裕
Akyoshida@aol.com

1　はじめに

1.1　研究を始めた切っ掛け

定期試験前の生徒や，入試勉強のため復習をしている３年生からを受ける質問の中でよく聞かれるものの中に、漸化式の解法がある．元気な生徒からは不満げに、おとなしい生徒からはすまなそうに、「漸化式を解くときのあの方程式はどこから出てくるのですか？」,「結局あの方程式は何なのですか？」と質問される．教師は少ない授業時間のなかで、できるだけ多くのことを教えてあげようと簡潔な解答　–例えば隣接２項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\risingdotseq 0,\ 1)$ なら方程式 $\alpha=p\alpha+q$ を引く解法–　を示すことがある．しかしそれが必ずしも数学が苦手な生徒に取って分かりやすとは限らないようだ．

初項 a_1 の値を決めないで、隣接２項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+g(n)$ $(p\risingdotseq 0,\ 1)$ を満たす解数列 の構造を考えてみる．解数列の構造は不定方程式 $ax+by=c$ $(a^2+b^2\risingdotseq 0,\ \ c\risingdotseq 0)$ の解の構造 −解は非斉次方程式 $ax+by=c$ のある１つの特殊解と斉次方程式 $ax+by=0$ の一般解の和となる− と同じで，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+g(n)$ を満たすある１つの特殊解と漸化式 $a_{n+1}-pa_n=0$ を満たす一般解の和で構成される．これは偶然ではなく、漸化式から作られる数列全体（これは線形空間になる）から数列全体への写像を考えたとき、漸化式 から作られる写像が線形写像になっている当然の結果である．このように解の構造が分かれば、漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ を解くためには１つの特殊解を求めればいいことが分かる．（方程式 $\alpha=p\alpha+q$ を解くことは特殊解の一つを求めている）

しかし，高校生にそのまま線形代数を教えても多くの生徒が混乱するだけで数学嫌いな生徒を増やすだけになる．線形代数を教えるのではなく，生徒自身の活動から，漸化式の解空間の構造を見つける授業ができないかと考えたのが、この研究をはじめた切っ掛けである．

1.2　研究の目的

次の２つの問題の開発と授業案の作成を目的とする．

1. 「隣接２項間漸化式 $a_{n+1}=pa_n+g(n)$ 」の解の構造を，生徒が活動によって考えつく問題の開発とそれを使った授業案の作成．
2. 「隣接３項間漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+ga_n$ 」の解の構造を，生徒が活動によって考えつく問題の開発とそれを使った授業案の作成．

1.3 今回発表する内容

1. 昨年夏休み明けと今年の夏休み前，ある高校で生徒から漸化式の解法が分からないから説明してくれといわれ樹形図をつかった「誤差数列分離法」で説明した．そのとき生徒の様子をみながら説明や樹形図の書き方に改良を加えた．どのように改良を加えたか.
2. 前回の新潟大会の発表後,「誤差数列分離法」を使って隣接２項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ を解くとき，誤差を発生させる $g(n)$ が定数関数でないとき特殊解をどのように求めればいいか質問された．そのためには，漸化式から作られる写像になれておく必要がある．どのようにしたらいいか授業案の授業案.
3. 隣接３項間漸化式のブラックボックス等を使った，解空間の線形構造に気がつかせる授業案

2　誤差数列分離法

2.1　誤差数列分離法とはなにか？

前回提示した問題とその解答で説明する．

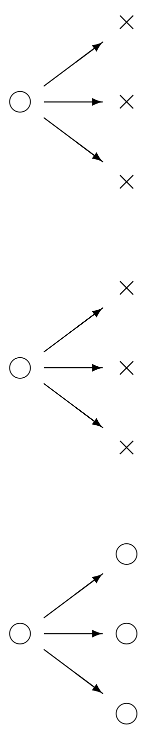
問題 2.1

次の隣接２項間の漸化式と初期条件であたえられる数列の樹形図を書き構造を研究しろ。

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 6 \\ a_1 = 3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 6 \\ a_1 = 4 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 6 \\ a_1 = 5 \end{cases}$

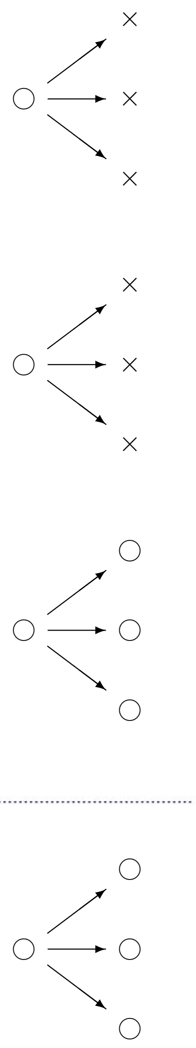
解】(1) 樹形図は下のようになる．
つまり、n が 1 増えると 3 倍に増えるが「-6」があるため減ってしまい、「3 個」ともとの状態に戻りその繰り返し．よって、
一般項も簡単に求まり．

$\underline{a_n = 3.}$



(2) (1) から初期条件の 4 個を 3 個と 1 個に分けて樹形図を 描けば構造が分かりやすい．3 個が -6 の影響を吸収し、残りの 1 個は 3 倍 3 倍と増えていく．よって、一般項も簡単に求まり，

$\underline{a_n = 1 \times 3^{n-1} + 3.}$



(3) (2) と同様に初期条件 5 個を $3 + 2$ に分けて 3 個に -6 の影響を吸収してもらえばいい．
この場合も一般項は簡単に求まって、

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} + 3$$

□

隣接２項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ は「$+g(n)$」がなければ公比 a の等比数列である．上の解のように，「$+g(n)$」の影響が及ぶ範囲を分離して考える方法を授業で「誤差数列分離法」よぶことにした．

2.2　生徒が混乱した点

前回発表したあと２回「誤差数列分離法」で隣接２項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ の解法を説明する機会があった．いずれも漸化式の解法が分からないから説明してくれと生徒から頼まれたためで，そのときの私の担当はベクトルで数列ではなかった．そのため，正規の授業ではなく１時間の授業の中で説明しただけだったがかえって「誤差数列分離法」の問題点が見えてきた．

2.2.1　樹形図に戸惑う

漸化式で表されている数列の変化の様子とそれを図で表現した樹形図が結びつかないで，そこで戸惑っている生徒が多かった．

2.2.2　-6 が全体からでなく，それぞれからだと思ってしまう

問題 2.1 の (2) を考えるとき，(1) から増えた１個には「-6」は影響しない，つまり「-6」は各 n に対して全体から１回引けばいいが，(1) から増やした１個も漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 6$ を満たしているので「-6」に影響されると思ってしまう．

2.3　解決策

筑駒では駒野誠 (2006) の中学での実践（場合の数を求めるとき樹形図を描かせ，その図の自己相似をいかし漸化式を作らせる）から，樹形図を活用する教員が増えてきた．そのため「漸化式が表している数列を漸化式で表現して考えるみろ」との設問も中学からきた生徒には抵抗がないと思われた．しかし，高校からきた生徒もいるので実際の授業では前回発表した問題の前に次のような問題もやっていた．

問題 2.2

10 分たつと３つに分裂して増えるなぞの宇宙細菌がある．初めの細菌を第１世代、１回分裂したものを第２世代、次に分裂したものを第３世代、$\cdots\cdots$ とする．分裂するごとに各世代の標本として１個の細菌をシャーレから取り出し採集（もとに戻さない）する．このときのシャーレの中にある第 $n\ (\geqq 2)$ 世代の個数 (１個収集した後）を a_n，はじめの細菌の個数を a_1 とする．次の問いに答えよ．ただし、初めに３個の細菌があり、細菌は死なないものとする．

(1) シャーレの中の細菌の様子を図示し，a_1, a_2, a_3, a_4 をそれぞれ求めよ．
(2) a_{n+1} と a_n の関係を式で表せ．

このような問題を事前にやっておけば，漸化式を樹形図で表すこと，１個とるのは毎回やるが各世代でその世代全体から１を１回引くだけでいいことが納得しやすくなると思われる．

3　$g(n)$ が定数関数でないとき

漸化式にでてくる $g(n)$ が定数関数だと，樹形図を使えば誤差数列を見つけやすくなる．定数関数でないときはでうであろうか．実際に生徒にだした問題（前回の発表でも提示）をみてみる．

問題 3.1

次の漸化式と初期条件であたえられる数列 $\{a_n\}$ も

$a_n = b_n + c_n$　ただし、$\{b_n\}$ は等比数列、$\{c_n\}$（誤差数列）は一般項が求められる数列.

とできるか．樹形図を描き考えろ.

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2n + 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4^n \\ a_1 = 5 \end{cases}$

前回の発表後の指摘のように,「樹形図を使った誤差数列分離法」は考える方法を与えてくれるが，機械的に解くアルゴリズムを与える分けではない．$g(n)$ が定数関数のときは誤差数列は見つけやすかったが，定数関数でないと生徒によってはなかなか上手く見つけられないことがある．では授業をどのように展開すればいいのだろうか．それを述べるまえに，漸化式の解空間の構造について振り返ってみる.

3.1　数学的構造

よく知られているように、数列全体は線型空間をなし、漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ 全体は次のような構造を持つ.

3.1.1　実数列全体の空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ と表す．またすべての項が定数 a である数列を定数数列と呼び $\{a\}$ と表すことにする．実数列 $\{a_n\}$ 全体の空間：$\{\{a_n\} | a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n,\ \cdots \in \mathbb{R}\}$ は数列の和とスカラー倍により $\mathbb{R}$ 線型空間になる．実数列は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ の写像と考えられるので、この実数列全体からなる線型空間を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表すことにする.

3.1.2　$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ から $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ への線型写像

写像 $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$を、数列 $\{a_n\}$ に対して $b_n = a_{n+1} - pa_n$で定まる数列 $\{b_n\}$ を対応させる写像とする．このとき、写像 F は線型写像になる.

3.1.3　線型写像 $\boldsymbol{F}$ の逆像としての解

漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ を

$$a_{n+1} - pa_n = g(n) \tag{3.1.1}$$

と変形する．$\{g(n)\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ なので漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ は $F(\{a_n\}) = \{g(n)\}$ と書くことができる．よって、漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ を解くことは、線型写像 F による $\{g(n)\}$ の逆像を求めることに帰着される.

3.1.4　漸化式 $\boldsymbol{a_{n+1} = pa_n + g(n)}$ の解の構造

線型写像の性質と 3.1.3 より、漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ の解は、漸化式

$$x_{n+1} - px_n = 0$$

のを満たす一般解 $b_n = sp^{n-1}$ と漸化式

$$y_{n+1} - py_n = g(n)$$

のを満たす 1 つの特殊解 c_n を使って、

$$a_n = b_n + c_n$$

と表される.

3.2　方程式 $\boldsymbol{\alpha = p\alpha + q}$ の正体

隣接 2 項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ の $g(n)$ が定数関数 $g(n) = p$ のとき，この漸化式を解くときに出てくる方程式 $\alpha = p\alpha + q$ は，樹形図を使った誤差数列分離法で考えれば誤差数列（この場合は定数数列）を求めていることになるが，線形代数の考えを使えば，漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ を満たす 1 つの特殊解（数列）を求める方程式となる．これが方程式 $\alpha = p\alpha + q$ の正体である．誤差数列を求めるとは，特殊解を求めることになるが，樹形図を使えば $g(n)$ が定数のときは誤差数列が定数数列になることが見つけられる．では，$g(n)$ が定数関数ではないときはどのよう授業を構成すればいいのだろうか．

3.3　数列から数列を作る写像で遊ぶ

誤差数列を求めることは，特殊解の 1 つを求めることなので，とにかく漸化式を満たすものを 1 つ見つけてしまえばいい．教師はいろいろな数列についての経験があるが生徒はないので，解を満たす数列の候補になかなか気がつかない．方程式を満たす候補に気がつかせるためには，数列から数列を作る写像に慣れさせ，どんな数列を入力すればどんな数列が出力されるか多くの経験を生徒に積ませれことが重要だろう．

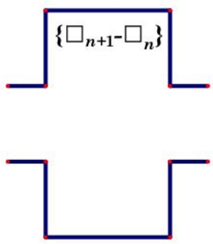
数列から数列を作る写像の 1 つは階差数列をつくる写像がある．階差数列が出てきたところで，階差数列を作る操作をブラックボックスを使い表し，いろいろな数列を代入させ，出力となる数列を実際に作らせるてみる．またを写像を

$$F : \{a_n\} \longmapsto \{a_{n+1} - pa_n\}$$

と変え，この場合もいろいろな数列を代入させ，出力となる数列を実際に作らせることが重要になるだろう．以下問題例をあげる．

問題 3.2

次のような，数列から数列を作るブラックボックスがある．次の数列を代入したときにできる数列の初項から第 5 項までと一般項を求めよ．



(1) $a_n = n$

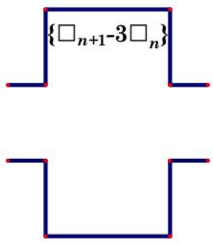
(2) $a_n = 3^{n-1}$

(3) $a_n = n^2 + 3n - 1$

(4) 自分で考えたいろいろな数列

問題 3.3

次のような，数列から数列を作るブラックボックスがある．次の数列を代入したときにできる数列の初項から第 5 項までと一般項を求めよ．



(1) $a_n = n$

(2) $a_n = 3^{n-1}$

(3) $a_n = n^2 + 3n - 1$

(4) 自分で考えたいろいろな数列

問題 3.4

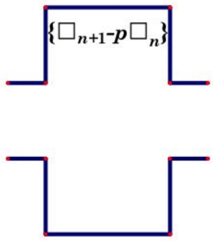
次のような数列から数列を作るブラックボックスがある．定数 p の値をいろいろと変え，次の数列を代入したときにできる数列の初項から第５項までと一般項を求めよ．

(1) $a_n = n$

(2) $a_n = 3^{n-1}$

(3) $a_n = n^2 + 3n - 1$

(4) 自分で考えたいろいろな数列



3.4　隣接３項間漸化式の伏線としての合成写像

写像で遊ぶときには，隣接３項間の伏線として次のような合成写像もやっておくといい．

問題 3.5

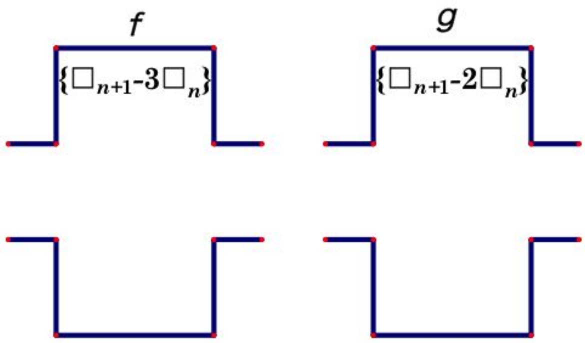
次のような数列から数列を作るブラックボックス f，g がある．次の問に答えよ．

(1) $g \circ f(\{a_n\})$ を求めよ．

(2) $f \circ g(\{a_n\})$ を求めよ．

(3) 合成写像 $g \circ f$ に数列 $\{3^{n-1}\}$ を代入するとどうなるか．

(4) 合成写像 $g \circ f$ に代入したら数列 $\{0\}$ となる数列の例を探せ．



4　隣接３項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$

以下，4.1 で解空間の数学的構造，4.2 から授業案を示す．ただし，4.3 以下で解く隣接３項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ は固有方程式が重解を持たないものである．

4.1　隣接３項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の解空間の構造

隣接３項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ から作られる写像

$$F \;:\; \{a_n\} \longmapsto \{a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n\} \tag{4.1.1}$$

は２項間漸化式と同じように線形写像となる．よって隣接３項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を解くことは，

$$F(\{a_n\}) = \{0\} \tag{4.1.2}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めることとなり，解空間は線形空間となる．

4.2　２つの数列の線形結合で表せることをつかませる

解空間が２つの線形独立な数列の線形結合で表せることを理解させるために次の問題を解かせる．

問題 4.1
　次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ がある．初期条件が以下のとき、a_3, a_4, a_5, a_6 a_7, a_8, a_9, a_{10} をそれぞれ求め，気がついたことを述べよ．また，他の隣接３項間漸化式でも同じことがいえるか確かめよ．

$$a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$$

(1) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ のとき．　(2) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ のとき．　(3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ のとき．
(4) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ のとき．　(5) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ のとき．　(6) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ のとき．
(7) $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ のとき．　(8) $a_1 = p$, $a_2 = q$ のとき．

与えられた漸化式を満たし, 初項 1 , 第 2 項が 0 の数列を $\{b_n\}$, 初項 0 , 第 2 項が 1 の数列を $\{c_n\}$ とすると, $a_1 = p$, $a_2 = q$ の数列は

$$\{a_n\} = p\{b_n\} + q\{c_n\}$$

とかけることが予想でき，他の場合もこの予想が成り立つことが実験から分かる．隣接３項間漸化式は初項と第２項を定めれば一意的に決まることを認めれば，漸化式を満たす２つの数列の線形結合も漸化式を満たすことより予想ではなく正しいことが分かる．このことから，漸化式を満たす全ての数列を表すには漸化式を満たす２つの独立な数列が分かればいい．ここで，数列から数列を作る写像で遊んだとき，合成写像もで考えたことが生きてくる．

4.3　隣接３項間漸化式 $a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$ を分解する

隣接３項間漸化式 $a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$ から作られる線形写像を問題 **3.5** の経験をいかし分解する．

問題 4.2 問題 3.5 を思いだし，対応規則

$$F : a_n \longmapsto a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n$$

で表されるブラックボックスを対応規則が

$$G : a_n \longmapsto a_{n+1} - \alpha a_n,$$
$$H : a_n \longmapsto a_{n+1} - \beta a_n,$$

で表される２つのブラックボックスの合成として表せないか考えろ．

4.4　基底となる２つの数列を見つける

問題 **3.5** の経験をいかし，隣接３項間漸化式 $a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$ を満たす２つの数列を見つける．

問題 4.3 問題 3.5 の (3), (4) を思いだし，漸化式

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$$

を満たす数列を２つ見つけろ．

4.5　隣接３項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を解く

基底が見つかったので，問題 **4.1** をいかし，隣接３項間漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を解く．

問題 4.4 次の漸化式の解法を考えろ．（ヒント：問題 4.1）

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

5　今後の課題

5.1　「樹形図を使った誤差数列分離法」について

「樹形図を使った誤差数列分離法」は，漸化式の解法を説明するためにも使えるが，授業を工夫すれば生徒が視覚的に漸化式の解の構造に気がつき，特殊解の 1 つを求めさえすればいいことを誤差数列を分離することから気がつくことができる教材だと考えている．しかし，実際授業をやってみると生徒の今までの数学的経験などの差より，生徒が思わぬところで（例えば漸化式を樹形図を使って表すこと）つまずくことが分かってきた．生徒の授業での様子を注意深く見ながら，今後も改良していく必要がある．

5.2　「ブラックボックスを使った漸化式の合成・分解法」について

こちらは，2009 年筑駒の高 2 に一部，問題 4.1 だけ次のように実践した．

最初に隣接 3 項間漸化式問題 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を変形し何とか等比数列を作ろうと

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

を示し，この α，β を求めるために固有方程式を導入した．その後 4.1 を解かせ，漸化式を満たす 2 つの数列を見つければその線形結合でかけることを確認し，固有方程式を使えば 2 つの数列が見つけられることを話した．

肝心のブラックボックスを使った漸化式の合成・分解法はまだ実践していない．つまり今回示した授業案はまだ案のままで実践して生徒にとって分かりにくいところなどの問題点を検証していない．そのため，前もってやったことがどの程度生徒の中に残っているか，多くの生徒に残っているためのは設問をどうすればいいかなど今後実践して確認していかなくてはならない．

また，今回の授業案は少しスモールステップになりすぎていると感じている．これについても実際の生徒の理解を考え改良していく必要があると考えている．

引用・参考文献

駒野誠（2006）「樹形図の自己相似構造に漸化式を見いだす：多角的視点に立った教材開発」日本数学教育学会誌第 88 巻 第 1 号，pp.2-10

吉田昌裕（2010）「「生徒が発見する」ための数列の問題の研究：「生徒の素朴な疑問」から出発して」日本数学教育学会誌第 92 巻 臨時増刊 第 92 回総会特集号（新潟大会），pp409