「生徒が発見する」ための数列の問題の研究

–「生徒の素朴な疑問」から出発して–

2010/ 8/ 3
第 92 回全国算数・数学教育研究（新潟）大会
高校部会　数学 B
武蔵大学経済学部講師
私立武蔵高校講師
筑波大学附属駒場中・高校講師
吉田 昌裕
Akyoshida@aol.com

1　はじめに

1.1　研究を始めた切っ掛け

この研究を始めた直接の切っ掛けは、生徒から言われた次の質問にある.「どこから、両辺に r をかけることがでてくるのですか？」上の質問は、『等比数列の和の公式』を導く授業が終わったとき、数学は苦手だがゆっくり考える生徒からでてきた実際の質問である. この質問に「両辺に r をかければ上手く途中が消えて和が求まるから」と答えても、彼の疑問に答えていないのは明らかである. なんとか天下り的にではなく、生徒が論理的に納得しながら、『等比数列の和の公式』を生徒と作っていく授業はできないだろうか. 生徒の素朴な質問から、生徒が自分で考え発見できる問題とそれを使った授業案について考えていくことにした.

1.2　研究の目的

次の２つの問題の開発と授業案の作成を目的とする.

1. 『等比数列の和の公式』を天下り的でなく教えるために適した問題とその問題を使った授業案.
2. 『２項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ 』の解法を天下り的でなく教えるために適した問題とその問題を使った授業案.

1.3　研究方法

研究方法としては,

1. 生徒に教えなければならない内容の「数学的本質はなにか」教材研究を数学的にやり直す.
2. 考えた問題と授業案で授業をやってみて、実際の授業での問題点や生徒の疑問（生徒の声）を集め、生徒に提示する問題を改良する.
3. １人では上手くいかないことがあるので, 問題を共同で考えたり, 失敗した問題を話しあえる場を作っていき, 問題や教材の共有化をはかる.（その１つとし、今回の発表の場を利用し多くの人の意見を聞く）

を考えている.

1.4　今回発表する内容

今回は以下の２つについて発表する．

1.4.1　『等比数列の和の公式』の求め方

「等比数列の和の公式」を導く方法は「両辺に公比 r を掛ける方法」（教科書に載っている)、「因数分解の公式 $r^n - 1 = (r-1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots\cdots + 1)$ を利用する方法」などが知られている．今回は、それ以外の方法を生徒が考えつくように工夫した問題について、'09 年度筑波大学附属駒場高校（以下筑駒）の高校２年生（59 期）に対して行った授業を踏まえ授業案とともに発表する．ポイントとなるのは「n 進法の繰り上がりについて」となる．そこに気が付けば公式は簡単に導ける．

1.4.2　『２項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ 』の解法

「式の変形による解法」を天下り的に教えるのではなく、生徒が漸化式によって具体的に数列を作っていくことによって解法に気が付くように工夫した問題について、'09 年度筑駒の高校２年生（59 期）に対して行った授業を踏まえ授業案とともに発表する．今回工夫した点は、漸化式の初期条件を変えることによって『２項間漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ 』の解となる数列全体の構造に注目させた点である．また、その構造を視覚化する方法として樹形図を使わせた．

2　発表について

2.1　発表方法

はじめは授業形式で実際に皆さんに「生徒に提示した問題」を解いてもらいながら、進めていきます．

2.2　お願い

2.2.1　作業用のプリントへ

発表を授業形式で進めていくので、発表を聞いて下さる方は 3 ページ以降は後で読んで下さい．後ろにある作業用のプリントに進んで下さい．一緒に考えていきましょう．

2.2.2　意見を聞かせて下さい

実際に解いてみて、「その問題が数学的に面白かったかどうか」、「自分も授業でやって見たいかどうか」、「この問題では生徒は分からない」等の意見を是非、後の質問の時間に教えて下さい．

3　「次々繰り上がり法」による等比数列の和の公式の導き方

3.1　授業案

はじめに次の問題を提示する．

問題 3.1.
次の数列 $\{a_n\}$ の第８項を簡単な式で表せ．

$$a_1 = 9, \quad a_2 = 99, \quad a_3 = 999, \quad a_4 = 9999, \quad \cdots\cdots$$

ここで、「１を足せば繰り上がること」に気づかせる

解】 $a_8 = 10^8 - 1$ □

今度は次の問題を提示する．

問題 3.2.
次の数列 $\{b_n\}$ の第８項を簡単な式で表せ．

$$b_1 = 7, \quad b_2 = 77, \quad b_3 = 777, \quad b_4 = 7777, \quad \cdots\cdots$$

ここで机間巡視をし、生徒の考えを聞く．生徒の様子によっては次の問題をヒントとして出す．

問題 3.3.
次の数列なら第８項はどうなるか？

$$b'_1 = 1, \quad b'_2 = 11, \quad b'_3 = 111, \quad b'_4 = 1111, \quad \cdots\cdots$$

数列 $\{b_n\}$ は３を足せばいいようだか、それでは次々とは繰り上がってはいかない．ヒントの数列 $\{b'_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の近くに書き、数列 $\{a_n\}$ を使うことに気がつかせる．

解】 $a_8 = 9b'_8$ より、$b'_8 = \dfrac{a_8}{9} = \dfrac{10^8 - 1}{9}$.　$a_8 = \dfrac{9}{7} b_8$ より、$b_8 = \dfrac{7\,a_8}{9} = \dfrac{7(10^8 - 1)}{9}$. □

この後は、２つの指導案を提示する．筑駒では＜指導案１＞の流れで（ただし、説明は n 進法 を中心にやった）

＜授業案１＞

問題 3.4.
数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ の第 n 項は、

$$a_n = 9 \times 10^0 + 9 \times 10^1 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^3 + \cdots\cdots + 9 \times 10^{n-1}$$
$$b_n = 7 \times 10^0 + 7 \times 10^1 + 7 \times 10^2 + 7 \times 10^3 + \cdots\cdots + 7 \times 10^{n-1}$$

とも表される．つまり、等比数列の和になっている．
では次の等比数列の和を求めるにはどうしたらいいか？
必要なら今までの方法（これからは「次々繰り上がり法」と呼ぶことにする）を使って考えよ．

(1) 初項 1、公比 3、項数 n の等比数列の和 S_n．つまり、
$$S_n = 1 \times 3^0 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 1 \times 3^3 + \cdots\cdots + 1 \times 3^{n-1}.$$
(2) 初項 3、公比 5、項数 n の等比数列の和 S_n．つまり、
$$S_n = 3 \times 5^0 + 3 \times 5^1 + 3 \times 5^2 + 3 \times 5^3 + \cdots\cdots + 3 \times 5^{n-1}.$$

「次々繰り上がり方」を使うためには、次々と繰り上がるように変形することがポイントになる．今まで解いた問題は 10 進法なので次々と繰り上がるには $9999\cdots\cdots$ となっていればよかった．ここでも机間巡視をし生徒がそのことに気が付いているかを調べる．生徒の様子によっては、次の発問をする．

【発問】
「次々繰り上がり法」を使うなら今までの問題を振り返ってみよう．今までの数列は 10 進法だった．
この場合「次々繰り上がり法」そのまま上手く使えたのは 数列 $\{a_n\}$ だ．ではどうして数列 $\{a_n\}$ は上手くいったか？

2.4 の解】 (1) 3 進法で次々繰り上がるためには 3 より 1 少ない 2 が続けばいい．つまり 2 進法で書いたとき「$222222\cdots\cdots$」となればいい．
よって、

$$2S_n + 1 = 3^n$$

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

(2) 5 進法では 5 より 1 少ない 4 が続けばいいので、

$$\frac{4}{3}S_n = 444444\cdots\cdots.(5\text{ 進法})$$

$$S_n = \frac{3(5^n - 1)}{4}$$

□

問題 3.5.
初項 a、公比 r、項数 n の等比数列の和 S_n を「次々繰り上がり法」を使って求めよ．

問題 2.4 で「次々繰り上がり法」以外の考えもでたら「「次々繰り上がり法」を使って」ではなく、「今までの考えを使って」に発問を変える．ここでも、机間巡視をし、生徒の様子では周りでの討論も認め（場合によっては、その討論に教師も加わり）考えさせる．
ただ、注意する点が 2 つある．n 進法の考えを使っているが

1. 公比 r より、初項 a の方が大きいことがある．
2. 公比 r が 1 以上の正の整数とは限らない．

しかし、「次々繰り上がり法」でポイントとなるのは、

$$r^{n-1} + (r-1) \times r^{n-1} = r^n$$

なので問題はない．

解】公比 r がどんな数でも、

$$r^{n-1} + (r-1) \times r^{n-1} = r^n$$

が成り立つので、

$$\frac{(r-1)S_n}{a} + 1 = r^n.$$

よって、

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

□

＜授業案２＞

問題 3.4.

今までの方法を「次々繰り上がり方」と呼ぶことにする．

次の数列 $\{c_n\}$、$\{d_n\}$ の一般項を「次々繰り上がり方」を使っても求めよ．ただし、$\{c_n\}$ の各項は 3 進法で、$\{d_n\}$ の各項は 5 進法で表されているとする．

また、答えは 10 進法で求めよ．

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 11, \quad c_3 = 111, \quad c_4 = 1111, \quad \cdots\cdots$$
$$d_1 = 3, \quad c_2 = 33, \quad c_3 = 333, \quad c_4 = 3333, \quad \cdots\cdots$$

「次々繰り上がり方」を使うためには、次々と繰り上がるように変形することがポイントになる．今まで解いた問題は 10 進法なので次々と繰り上がるには $9999\cdots\cdots$ となっていればよかった．ここでも机間巡視をし生徒がそのことに気が付いているかを調べる．生徒の様子によっては、次の発問をする．

【発問】

今までの問題は 10 進法だった．この場合「次々繰り上がり法」そのまま上手く使えたのは 数列 $\{a_n\}$ だ．

ではどうして数列 $\{a_n\}$ は上手くいったか？

2.4 の解】 3 進法で次々繰り上がるためには 3 より 1 少ない 2 が続けばいい．つまり 2 進法で書いたとき「$222222\cdots\cdots$」となればいい．

よって、

$$2c_n + 1 = 3^n$$
$$c_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

5 進法では 5 より 1 少ない 4 が続けばいいので、

$$\frac{4}{3}d_n = 444444\cdots\cdots.(5\text{ 進法})$$
$$d_n = \frac{3(5^n - 1)}{4}$$

□

問題 3.5.

数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ の各項を 10 進法に直せ．

解】$c_n = 1\times 3^0 + 1\times 3^1 + 1\times 3^2 + \cdots\cdots + 1\times 3^{n-1}$

$d_n = 3\times 3^0 + 3\times 3^1 + 3\times 3^2 + \cdots\cdots + 3\times 3^{n-1}$ □

問題 3.6.

問題 3.5 から、今まで求めていたのは、等比数列の和だったことがわかる．では、初項 a、公比 r、項数 n の等比数列の S_nは

どうやって求めればいいか．「次々繰り上がり法」を使って考えろ．

ここでも、机間巡視をし、生徒の様子では周りでの討論も認め（場合によっては、その討論に教師も加わり）考えさせる．ただ、注意する点が２つある．n 進法の考えを使っているが

1. 公比 r より、初項 a の方が大きいことがある．
2. 公比 r が 1 以上の正の整数とは限らない．

しかし、「次々繰り上がり法」でポイントとなるのは、

$$r^{n-1} + (r-1) \times r^{n-1} = r^n$$

なので問題はない.

解】公比 r がどんな数でも、

$$r^{n-1} + (r-1) \times r^{n-1} = r^n$$

が成り立つので、

$$\frac{(r-1)S_n}{a} + 1 = r^n.$$

よって、

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

□

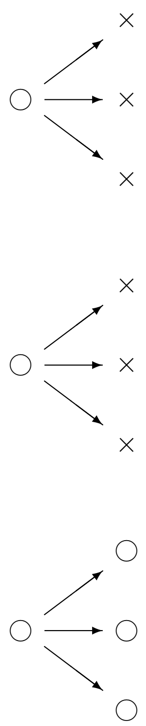
4　「誤差数列分離法」による隣接２項間の漸化式 $a_{n+1} = pa_n + g(n)$ の解法 ー樹形図を使った探求ー

4.1　授業案と実際の授業

問題 4.1.
次の隣接２項間の漸化式と初期条件であたえられる数列の樹形図を書き構造を研究しろ。

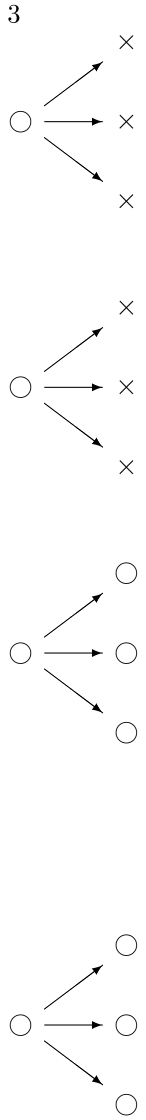
(1) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 6 \\ a_1 = 3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 6 \\ a_1 = 4 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 6 \\ a_1 = 5 \end{cases}$

解】(1) 樹形図は下のようになる.
つまり、n が 1 増えると 3 倍に増えるが「-6」があるため減ってしまい、「3 個」ともとの状態に戻りその繰り返し.



(2) (1) から初期条件の 4 個を 3 個と 1 個に分けて樹形図を 描けば構造が分かりやすい. 3 個が -6 の影響を吸収し、残りの 1 個は 3 倍 3 倍と増えていく. よって、一般項も簡単に求まる.

$$a_n = 1 \times 3^{n-1} + 3$$



(3) (2) と同様に初期条件 5 個を $3 + 2$ に分けて 3 個に -6 の影響を吸収してもらえばいい.
この場合も一般項は簡単に求まって、

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} + 3$$

□

ここで、生徒に「-6 がなければ 3 倍 3 倍の等比数列となること、-6 があるから、そこから誤差が出てしまうこと」、を確認させた．この形の漸化式は等比数列になるところと誤差を吸収する数列に分けられそうなので、等比数列との差になる部分の数列を一先ず誤差数列（ローカル用語であることを強調）名付けて授業を進めた．

問題 4.2.

次の漸化式と初期条件であたえられる数列 $\{a_n\}$ も

$$a_n = b_n + c_n \quad \text{ただし、}\{b_n\}\text{ は等比数列、}\{c_n\}\text{（誤差数列）は一般項が求められる数列.}$$

とできるか．樹形図を描き考えろ．

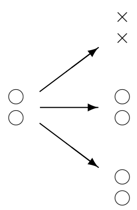
(1) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 4 \\ a_1 = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

解】(1) 樹形図は下のようになる．
この場合も、4 個 の初期条件を $2+2$ に分ければ
等比数列と誤差数列に分けられる．
よって、一般項は

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} + 2$$

(2) 下の樹形図のように工夫して 描けばこの場合も 解の数列は、 等差数列と誤差数列の構造となっている．
1 個 の初期条件を $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ に分ければ等比数列と誤差数列に
分けられる．
よって、一般項は

$$a_n = \frac{1}{2} \times 3^{n-1} + \frac{1}{2}$$



□

実際の授業ではここで、次のように生徒に問いかけた.

【問いかけ】

実験した数列はまだ少ないが、どうもこの型の漸化式は、

$$a_n = (\text{等比数列}) + (\text{誤差数列}) \qquad \cdots\cdots ①$$

となりそうだ. ただ、問題 **4.2.(2)** のように樹形図を描いてもすぐに分からないことがある. ① の型になるとき樹形図を描かないで誤差数列を求める方法を考えてみよう.

$a_n =$ (等比数列) + (誤差数列) となることが分かっても数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まるとは限らない. 誤差数列の一般項も求められなくてならない. そこで誤差数列を $f(n)$ とおき、問題 **4.2.(2)** を使ってもう一度考えることにした.

【問いかけ】

せっかく、$a_n =$ (等比数列) + (誤差数列) と分かっても誤差数列の一般項が分からなくは a_n の一般項は分からない. つまり、誤差数列は n の式として表されていなくてはならない. そこで誤差数列を $f(n)$ とおく. このとき、誤差数列はどのような性質をもっているか問題 **4.2.(2)** を使ってもう一度考えてみよう.

以下は、生徒と討論をしながら進めた.

$a_n = b_n + f(n)$ とおく. ただし、b_n は公比 3 の等比数列

数列 $\{a_n\}$ は漸化式を満たしているので代入すると、

$$b_{n+1} + f(n+1) = 3(b_n + f(n)) - 1.$$

ここで数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列なので、

$$b_{n+1} = 3b_n.$$

よって、

$$f(n+1) = 3f(n) - 1. \qquad \cdots\cdots ①$$

これより、誤差数列が存在したとしたら、誤差数列自身ももとの漸化式を満たしている. いま、n の関数 $f_0(n)$ が式① を満たしているとすると、もとの漸化式は

$$(a_{n+1} - f_0(n+1)) = 3(a_n - f_0(n))$$

と変形でき解くことができる. つまり、われわれは、① を満たす n の関数を見つければいい.

実際の授業では下の２つの問題も生徒に提示し、「周りと討論あり」で考えさせた. 私も机間巡視をしながら、討論に加わったり、いままでの討論や説明がわからない生徒に声をかけ、質問に答えた.

問題 4.3.

次の漸化式と初期条件であたえられる数列 $\{a_n\}$ も

$a_n = b_n + c_n$　ただし、$\{b_n\}$ は等比数列、$\{c_n\}$（誤差数列）は一般項が求められる数列.

とできるか. 樹形図を描き考えろ.

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2n + 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4^n \\ a_1 = 5 \end{cases}$

問題 4.4.

問題 4.3. のそれぞれの漸化式にたいして、数列 $\{a_n\}$ の誤差数列 $f(n)$ が満たす式を求めよ. また、その式から誤差数列を求め、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.